Algèbre linéaire - MATH111(f)

Semestre d'automne — 2025-2026

Série 7: Familles libres et génératrices d'espaces vectoriels

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) **vérifier ou construire des familles libres et/ou génératrices** d'un espace vectoriel ;

(O.2) **extraire une base** d'une famille génératrice et **compléter en une base** une famille libre d'un espace vectoriel ;

(O.3) **calculer le noyau et l'image d'une application linéaire, ainsi que des bases de ces sous-espaces vectoriels.**

Nouveau vocabulaire dans cette série

- base
- dimension
- noyau d'une matrice
- image d'une matrice

Noyau d'exercices

1.1 Preuve d'un résultat du cours

Exercice 1 (Extension d'une famille libre)
Soient V un espace vectoriel, $\mathscr{F} = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ une famille libre de vecteurs de V et $v_0 \notin \operatorname{Vect} \mathscr{F}$. Montrer que $\mathscr{F}' = \{v_0\} \cup \mathscr{F} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ est aussi une famille libre de V

1.2 Premiers exemples de bases

Exercice 2 (Base de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$)
On rappelle que $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel de matrices carrées de taille 2 avec coefficients dans $\mathbb{R}$.

(a) Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la partie de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ formée par les trois matrices A, B et C est libre.

(b) Trouver une matrice $D \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ telle que $\{A, B, C, D\}$ soit une base de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (Base de $\mathbb{P}_3$)
On rappelle que $\mathbb{P}_3$ désigne l'espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

(a) Considérons les familles de polynômes

$$\mathscr{F}_1 = \{1 - t^2, t^2, t\} \text{ et } \mathscr{F}_2 = \{1 + t + t^2, t + t^2, t^2\}.$$

Déterminer si $\mathscr{F}_1$ et/ou $\mathscr{F}_2$ est une famille libre de $\mathbb{P}_3$.

(b) La famille $\mathscr{F}_2$ est-elle une base de $\mathbb{P}_3$?

Exercice 4 (Extraction de base à partir d'une famille génératrice)
Trouver une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (Extraction d'une base à partir d'une famille génératrice et complétion d'une famille libre en une base)

(a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $W = \mathsf{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^2$, avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Trouver une partie $\mathscr{B} \subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ telle que $\mathscr{B}$ soit une base de W.

(c) Trouver une base $\mathscr{B}'$ de W satisfaisant $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathscr{B}'$.

Exercice 6 (Dimension d'un sous-espace de $\mathbb{R}^4$)
On considère le sous espace vectoriel

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension de W.

1.3 Bases de noyaux et d'images d'applications linéaires

Exercice 7 (Noyau et image d'une matrice I)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de $\mathsf{Ker}(A)$ et de $\mathsf{Img}(A)$.

Pour compléter la pratique

2.1 Premiers exemples de bases

Exercice 8 (Espace vectoriel de dimension infinie)
Montrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{P}$ formé des polynômes à coefficients réels est infinie.

2.2 Bases de noyaux et d'images d'applications linéaires

Exercice 9 (Noyau et image d'une matrice II)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver une base de $\mathsf{Ker}(A)$.

(b) On note $T_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'application donnée par $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$. L'application T_A est-elle injective ? Et surjective ? Justifier votre réponse.

Exercice 10 (Noyau et image d'une matrice III)
Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix},$$

pour tout $p \in \mathbb{P}_2$.

(a) Vérifier que T est linéaire.

(b) Trouver une base de $\mathsf{Ker}(T)$.

(c) Trouver une base de $\mathsf{Img}(T)$.